

Новітні підтвердження загальної теорії відносності — 2

Задачі: ІОАА 2007, відбори 2018

Прецесія
гіроскопів

Радіопульсари:
– гравічервоне зміщення
– зміщення перицентру
– затримка Шапіро
– гравітаційні хвилі

Гравітаційне лінзування:
– некоаксіальність
– спостереження
– мікролінзування

Підсумки

Доповідач
Таїсія Карасьова

Асистент
Діана Зазубик

6 січня 2023



Прецесія гіроскопів



$$\Omega_g = \frac{GJ}{r^3 c^2}$$

кутова швидкість прецесії

момент імпульсу тіла

радіус орбіти

Прецесія

Часопростір викривлюється, тому виникають поправки для гравітаційного потенціалу. В результаті, на об'єкт, що обертається, діють додаткові гравітаційні сили, які викликають прецесію.

0.041''

Прецесія Землі
за рік



$$\Omega_{geo} = \frac{3}{2} \frac{GMv}{r^2 c^2}$$

кутова швидкість геодезичної прецесії

орбітальна швидкість супутника

радіус орбіти

Геодезична прецесія

Виникає через викривлення часопростору поблизу гравітуючих мас. Тобто, видовження відрізків призводить не лише до повороту еліптичних орбіт, а й до повороту осі гіроскопа, що рухається такою орбітою.

Сильно більша
за гравітаційну!

6.6''

Прецесія супутника Землі
за рік. Підтверджено
Gravity Probe у 2004

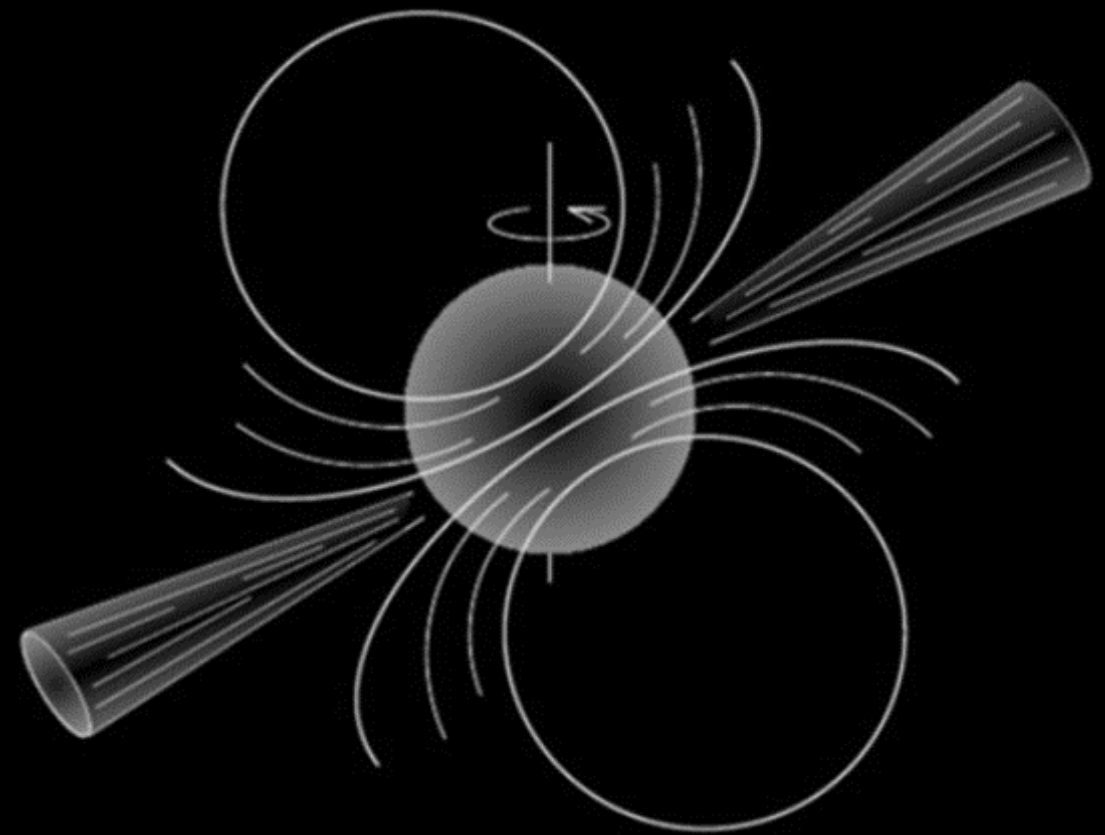


Радіопульсари



Пульсар — це нейтронна зоря, що обертається

Дві найважливіші властивості пульсару:
– високі яскравісні температури, $T > 10^{25}$ К
– строго періодичні сигнали



Деякі фізичні характеристики пульсарів:

$$T_{\text{rot}} \sim ms - s$$

$$\rho \gtrsim 10^{10} g/cm^3$$

$$B \gtrsim 10^{11} G$$



Механізм випромінювання



Яскравісна температура

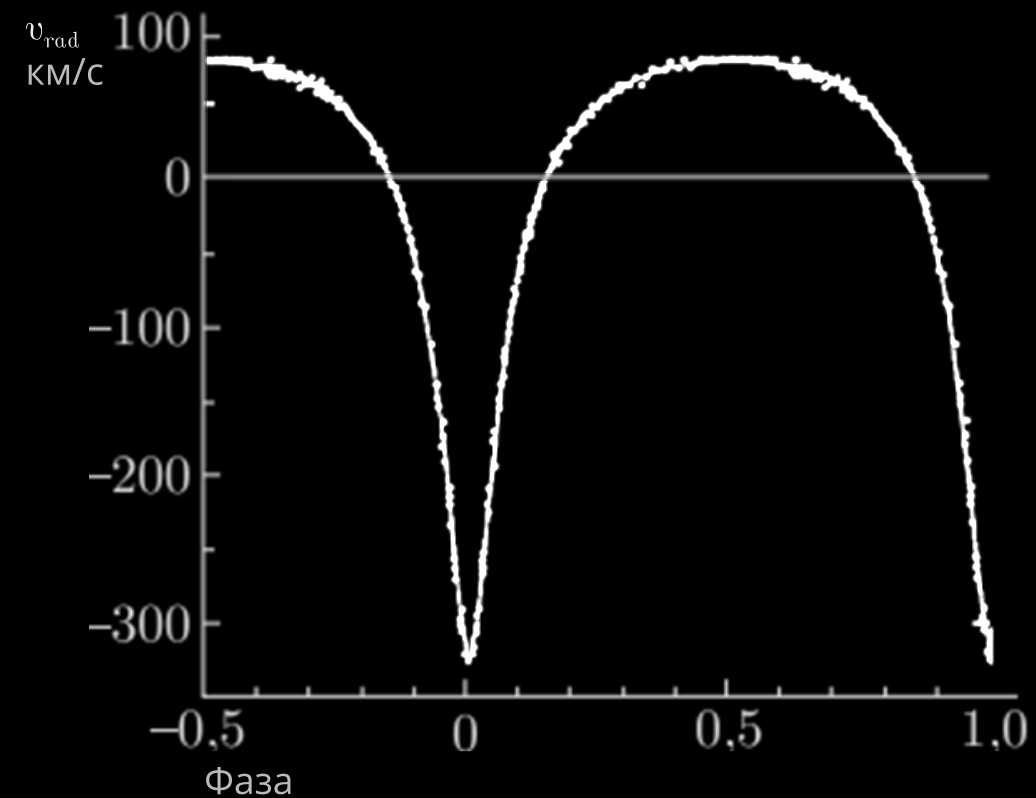
Температура такого
абсолютно чорного тіла, в
якого густина потоку
випромінювання для даної
частоти така сама



Чим корисні тісні системи пульсарів

Радіопульсар в подвійній системі — точний годинник. Рухаючись в гравітаційному полі зорі-компаньйона, він дає інформацію про кривизну часопростору.

Якщо компаньйон — нейтронна зоря, і при цьому орбіти достатньо низькі, то фіксуються всі постньютонівські ефекти: гравітаційне червоне зміщення, зміщення довготи периастру та затримка Шапіро.



З цього графіку знаходять:

- орбітальний період P_{orb}
- ексцентриситет e
- проекцію великої півосі $a_1 \sin i$

– функцію мас
$$f(M) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$$



Чим корисні тісні

v_{rad} 100
KM/C

Для колової орбіти:

$$\frac{M_1 v_1^2}{a_1} = \frac{G M_1 M_2}{(a_1 + a_2)^2}$$

$$a_1 M_1 = a_2 M_2$$

$$P_{\text{orb}} = \frac{2\pi a_1}{v_1}$$

Також, в загальному випадку:

$$K_1 = \frac{(2\pi G)^{1/3} M_2 \sin i}{P_{\text{orb}}^{1/3} (M_1 + M_2)^{2/3} \sqrt{1 - e^2}}$$

$$= \left(\frac{2\pi G f(M)}{P_{\text{orb}}} \right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Амплітуда променевої швидкості:

$$K_1 = v_1 \sin i$$

Підставляючи, отримуємо:

$$K_1 = \frac{(2\pi G)^{1/3} M_2 \sin i}{P_{\text{orb}}^{1/3} (M_1 + M_2)^{2/3}} = \left(\frac{2\pi G f(M)}{P_{\text{orb}}} \right)^{1/3}$$

де введено функцію мас $f(M) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}$

Рад
год
зор
кри

Якш
цьо
фік
гра
дов



Зміщення периастру

Зміщення
периастру
за один оберт

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

Швидкість руху
периастру

$$\dot{\omega} = 3 \left(\frac{P_{orb}}{2\pi} \right)^{-5/3} \left(\frac{G}{c^3} (M_1 + M_2) \right)^{2/3} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$



Поперечний ефект Доплера

При швидкостях, близьких до c ,
використовуємо точну формулу для
доплерівського зсуву частоти

Як і в гравітаційному червоному зміщенні,
виникає поправка до частоти $\nu \propto c^2$

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{\parallel}}{c}}$$



Гравічервоне зміщення

Зміна періоду
пульсацій

$$\Delta P = P \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{c} - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{GM_2}{c^2 r_{12}} \right)$$

Амплітуда
затримки
сигналів

$$\gamma_p = e \left(\frac{P_{orb}}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{G^{2/3}}{c^2} \frac{M_2(M_1 + 2M_2)}{(M_1 + M_2)^{4/3}}$$



Затримка Шапіро

Залежить від двох параметрів:

- амплітуди затримки $r_s = \frac{GM_2}{c^3}$
- нахилу до картинної площини $s = \sin i$



Гравітаційні хвилі

Потужність $W_g = \frac{32}{5} \frac{G^4 M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{c^5 a^5} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) (1 - e^2)^{-7/2}$

Зміна
орбітального
періоду $\dot{P}_{orb} = -\frac{192\pi}{5} \left(\frac{P_{orb}}{2\pi}\right)^{-\frac{5}{3}} \frac{G^{\frac{5}{3}} M_1 M_2}{c^5 (M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) (1 - e^2)^{-7/2}$



Посткеплерівські параметри системи

$$\gamma_p = e \left(\frac{P_{orb}}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{G^{2/3} M_2 (M_1 + 2M_2)}{c^2 (M_1 + M_2)^{4/3}}$$

$$\dot{\omega} = 3 \left(\frac{P_{orb}}{2\pi} \right)^{-5/3} \left(\frac{G}{c^3} (M_1 + M_2) \right)^{2/3} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\dot{P}_{orb} = - \frac{192\pi}{5} \left(\frac{P_{orb}}{2\pi} \right)^{-\frac{5}{3}} \frac{G^{\frac{5}{3}} M_1 M_2}{c^5 (M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2}$$

$$r_S = \frac{GM_2}{c^3}$$



Прецесія

Геодезична прецесія в тісних подвійних системах із радіопульсарами — *суттєво* більша ніж в Земних умовах

$\sim 1^\circ$

Річна прецесія нейтронної зорі, що обертається

→ Можливий такий сценарій:

Вісь радіопульсара суттєво змінюється за час спостережень

→ Як мінімум, змінюється профіль радіовипромінювання

А, можливо, радіопромінь *взагалі перестав* потрапляти на Землю



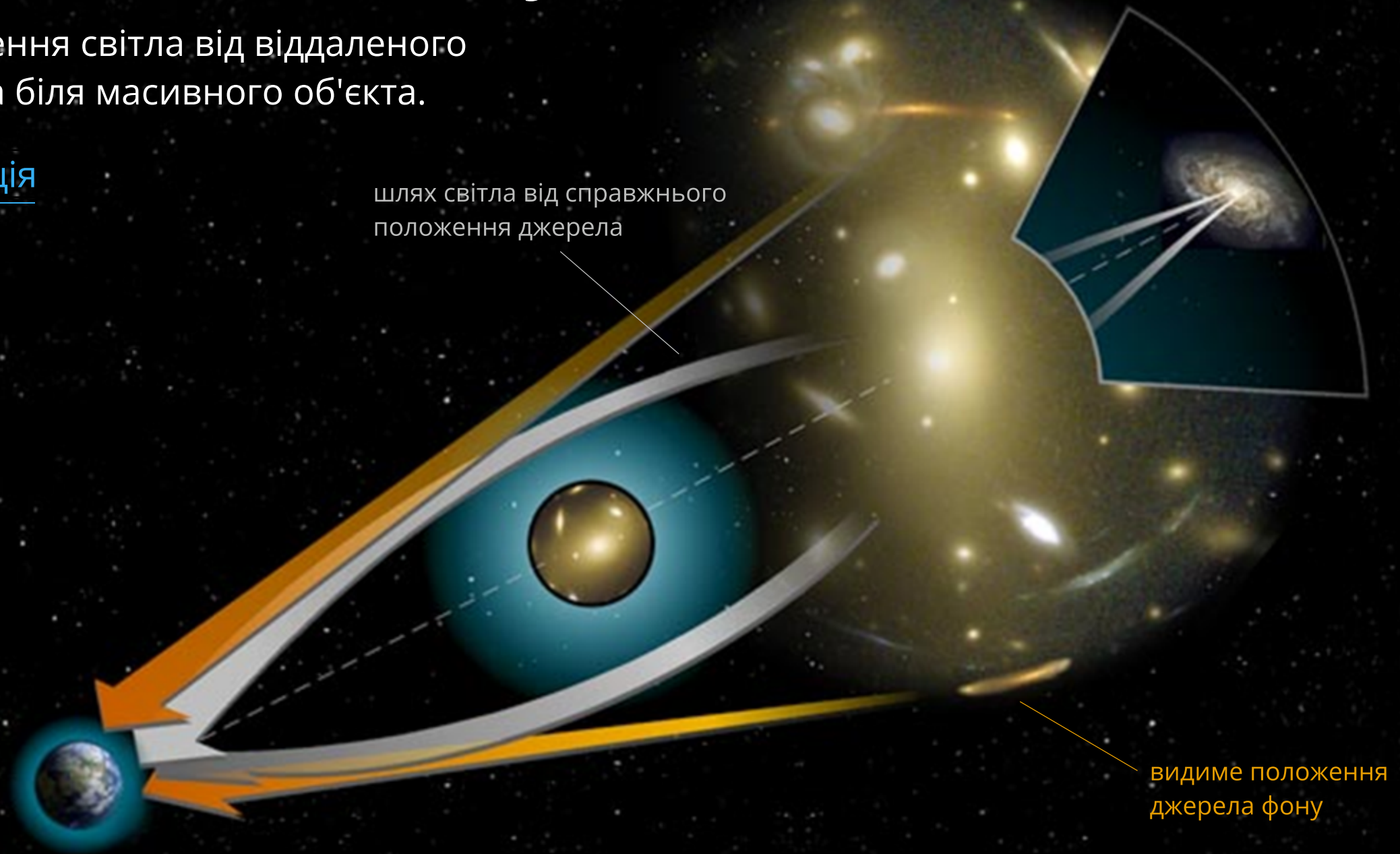
Гравітаційне лінзування



Гравітаційне лінзування

Заломлення світла від віддаленого джерела біля масивного об'єкта.

Симуляція





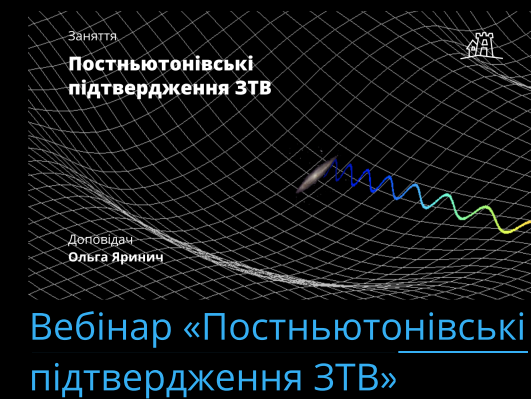
$$\phi = \frac{4GM}{\xi c^2}$$

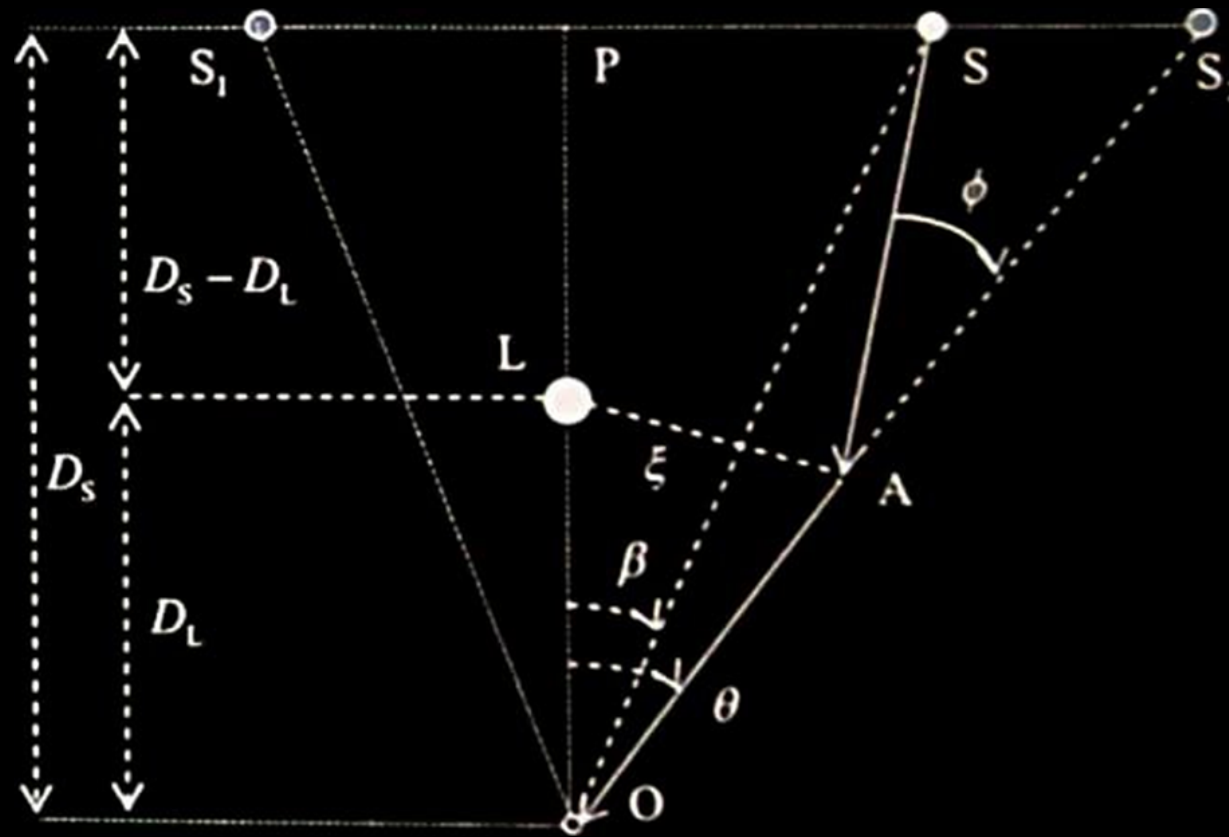
кут заломлення

прицільний
параметр

Заломлення світла

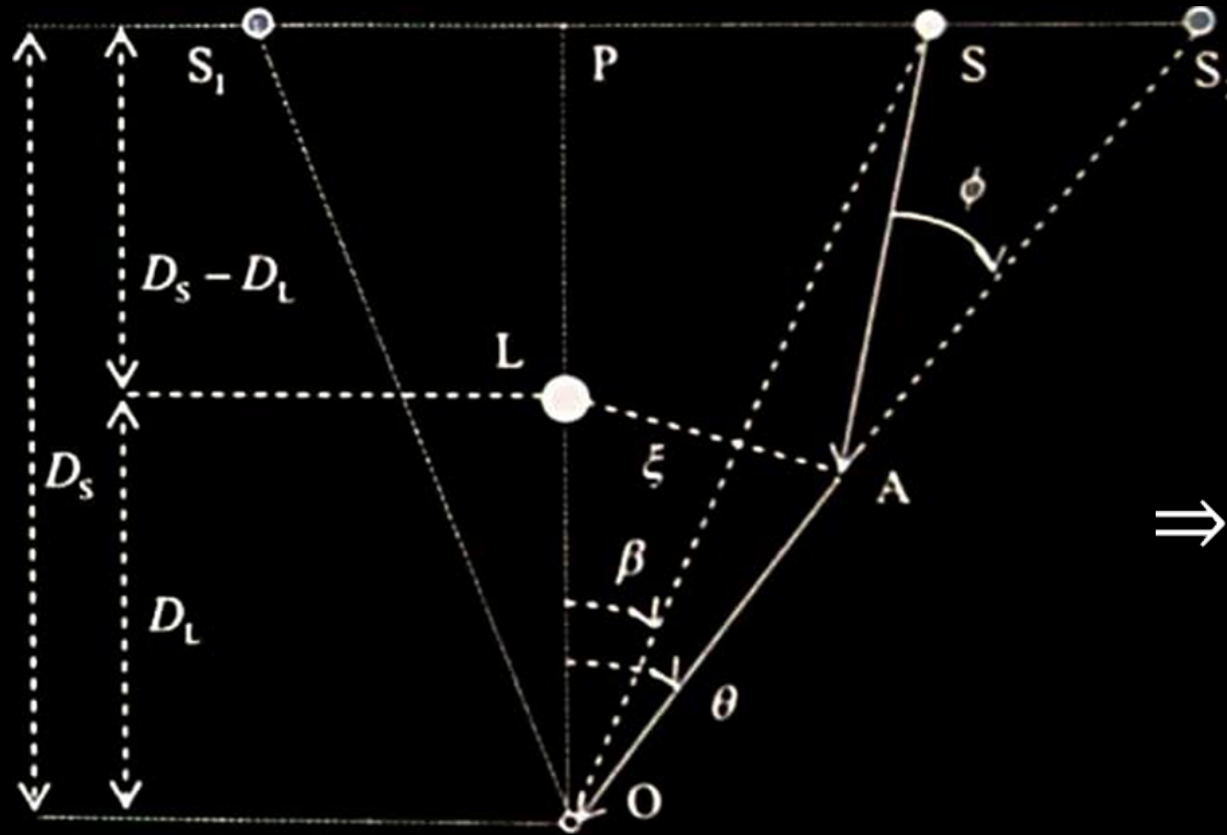
Відбувається в гравітаційному полі масивного об'єкту. Якщо для постньютонівських підтверджень це заломлення світла в полі Сонця, то для новітніх — в полі галактик, скупчень галактик та надмасивних чорних дір





Зі збірника ІОАА 2007

Промені від джерела S заломлюються лінзою L та досягають спостерігача O так, ніби вони надходять від джерел S_1 та S_2 . Кути ϕ , β , θ дуже малі



$$(SA) \approx (PL) = D_S - D_L$$

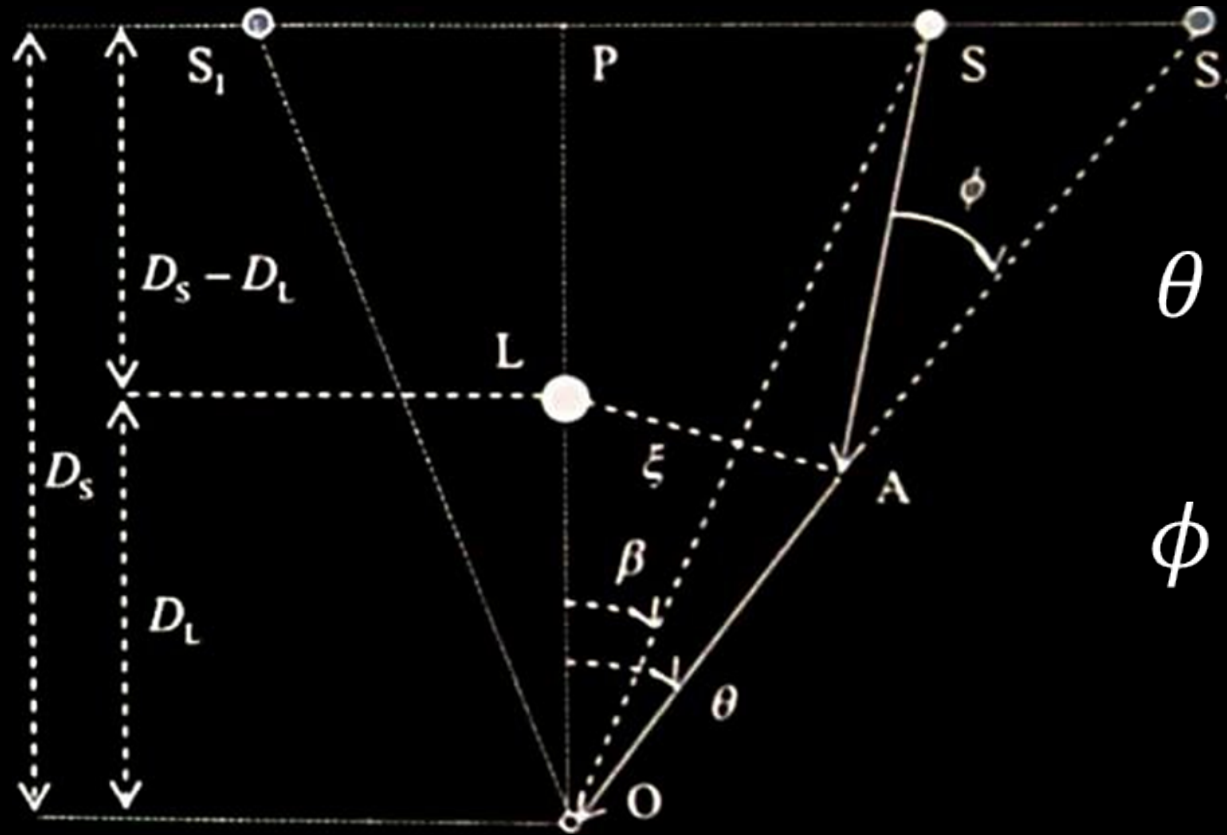
$$PS_2 = PS + SS_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_S \theta = D_S \beta + (SA) \phi :$$

$$= D_S \beta + (D_S - D_L) \phi$$

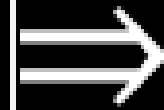
$$\theta = \beta + \frac{D_S - D_L}{D_S} \phi$$

$$\phi = \frac{4GM}{\xi c^2}$$

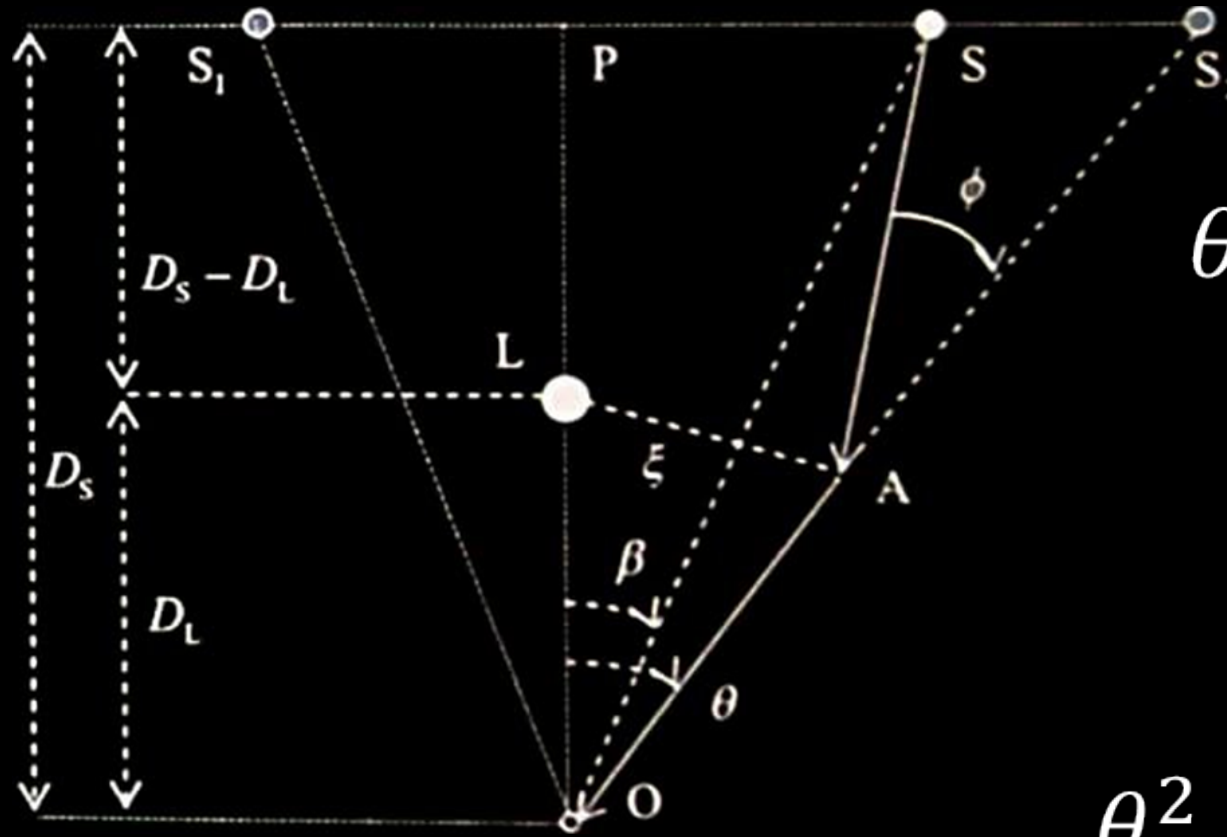


$$\theta = \beta + \frac{D_S - D_L}{D_S} \phi$$

$$\phi = \frac{4GM}{\xi c^2}$$



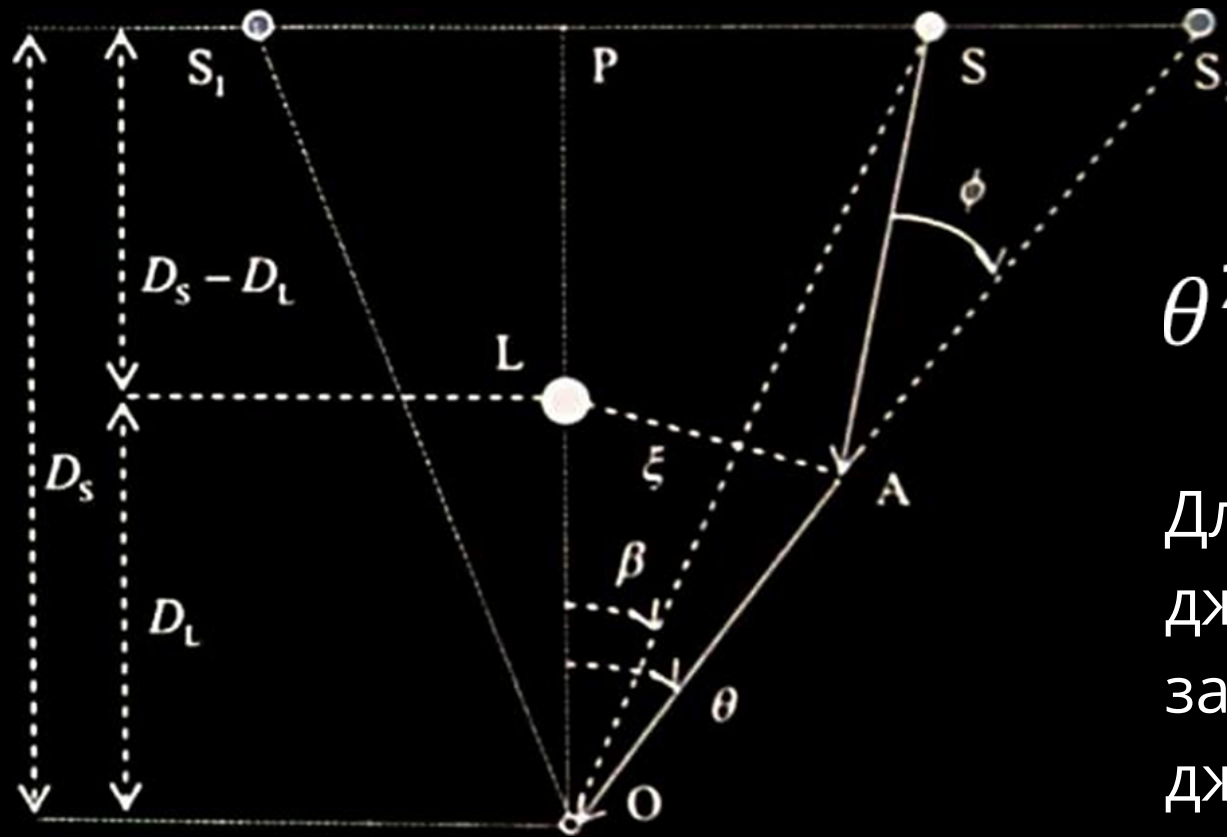
$$\Rightarrow \theta - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S} \cdot \frac{4GM}{\xi c^2}$$



$$\theta - \beta = \frac{D_S - D_L}{D_S} \cdot \frac{4GM}{\xi c^2}$$

$\xi = D_L \theta$

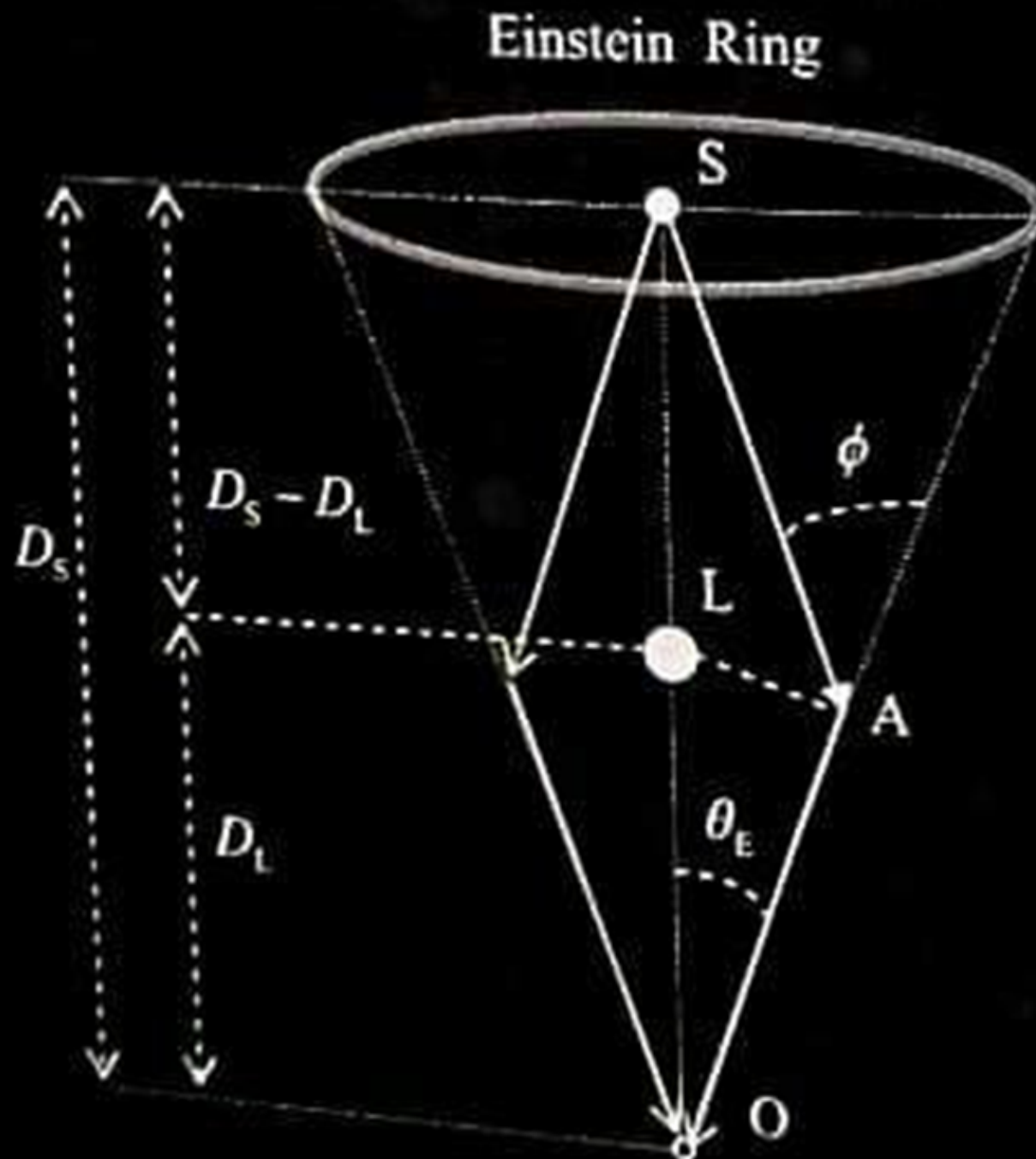
$$\theta^2 - \beta\theta = \frac{D_S - D_L}{D_S D_L} \cdot \frac{4GM}{c^2}$$



$$\theta^2 - \beta\theta = \frac{D_S - D_L}{D_S D_L} \cdot \frac{4GM}{c^2}$$

Для окремого випадку, коли джерело знаходиться чітко за лінзою ($\beta=0$), зображення джерела — кільце (Айнштейна-Хвольсона) з кутовим радіусом

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_S - D_L}{D_S D_L}}$$



Для окремого випадку, коли джерело знаходиться чітко за лінзою ($\beta=0$), зображення джерела — кільце (Айнштейна-Хвольсона) з кутовим радіусом

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_s - D_L}{D_s D_L}}$$



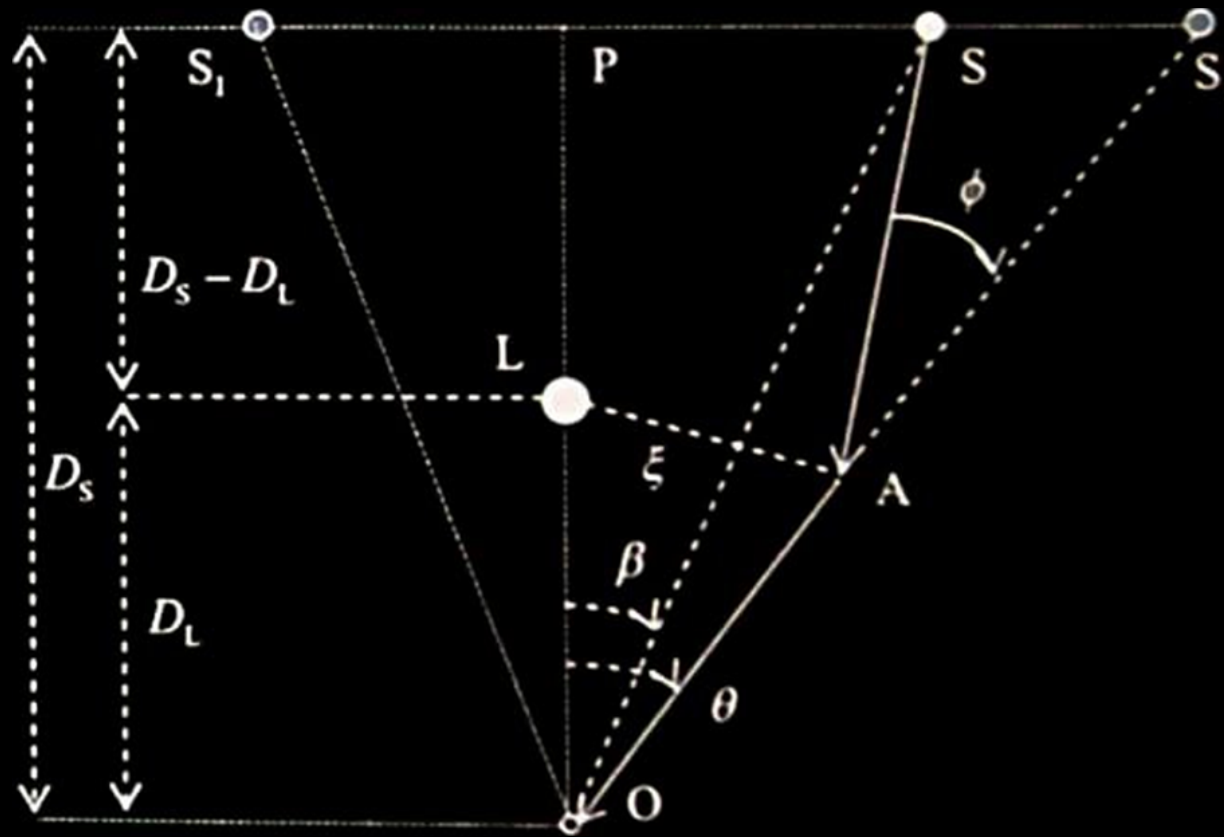
задача

Відстань від Землі до зорі $D_S = 50$ кпк,
відстань від лінзи до джерела $D_{LS} = 10$ кпк
Маса лінзи $M_L = M_\odot$. Обчисліть радіус
кільця Айнштейна-Хвольсона. Чи можна
його побачити за допомогою телескопа
Хаббла?

$$D_L = D_S - D_{LS} = 40 \text{ кпк} \Rightarrow \theta_E = \sqrt{\frac{4GM_\odot}{c^2} \cdot \frac{D_{LS}}{D_S D_L}} \approx 2'' \cdot 10^{-4}$$

Кутова роздільна здатність Хаббла
у видимому діапазоні (діаметр $D=2.4$ м,
довжина хвилі $\lambda \approx 500$ нм)

$$\theta_{Hubble} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \approx 5'' \cdot 10^{-2} \Rightarrow \theta_{Hubble} > \theta_E \Rightarrow \text{Ні}$$



$$\theta^2 - \beta\theta = \frac{D_S - D_L}{D_S D_L} \cdot \frac{4GM}{c^2}$$

Для зорі, що знаходиться не на одній прямій із лінзою ($\beta \neq 0$), будо утворено два зображення. Знайдемо їх кутові положення (θ_1 та θ_2).



$$\theta^2 - \beta\theta = \frac{D_S - D_L}{D_S D_L} \cdot \frac{4GM}{c^2}; \quad \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_S - D_L}{D_S D_L}}$$

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \Rightarrow \theta_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}$$

Введемо позначення $\eta = \frac{\beta}{\theta_E} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\beta} = \frac{1}{\theta_E}$

$$\frac{\theta_{1,2}}{\beta} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2}}}{2}$$



$$\eta = \frac{\beta}{\theta_E}; \quad \theta_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}$$

$$\frac{d\theta_{1,2}}{d\beta} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2}}}$$

$$\text{збільшення} = \frac{\text{тілесний кут зображення}}{\text{тілесний кут джерела}}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{\theta_{1,2}}{\beta} \frac{d\theta_{1,2}}{d\beta}$$



$$\frac{\theta_{1,2}}{\beta} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2}}}{2}$$

$$\frac{d\theta_{1,2}}{d\beta} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2}}}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{\theta_{1,2}}{\beta} \frac{d\theta_{1,2}}{d\beta} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2}}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2}}} \right)$$



$$\mu_{1,2} = \frac{\theta_{1,2}}{\beta} \frac{d\theta_{1,2}}{d\beta} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2}}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{4}{\eta^2}}} \right)$$

$$\mu_{1,2} = \frac{\eta^2 + 2}{2\eta\sqrt{\eta^2 + 4}} \pm \frac{1}{2}$$

Загальне збільшення:

$$\mu = |\mu_1| + |\mu_2| = \frac{\eta^2 + 2}{2\eta\sqrt{\eta^2 + 4}}$$



задача

SDSSJ0946+1006- унікальна система гравітаційних лінз, яка складається з 3х галактик. Через їх розташування практично на одній прямій з Землею, утворюється зображення, що складається з двох кілець Ейштейна-Хвольсона. Найближча галактика має $z = 0.222$, внутрішнє кільце $z_1 = 0.609$, зовнішнє кільце $z_2 \lesssim 6.9$. Оцінити радіус зовнішнього кільця, якщо внутрішнє має радіус $1.43 \pm 0.01''$

Відстань до найближчої галактики:

$$D_L = \frac{c \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}}{H} \approx 848 \text{ Mpc}$$



Найближча галактика $z = 0.222$, внутрішнє кільце $z_1 = 0.609$, зовнішнє кільце $z_2 \lesssim 6.9$. Оцінити радіус зовнішнього кільця, якщо внутрішнє має радіус $1.43 \pm 0.01''$

Відстань до другої галактики:

$$D_{S1} = \frac{c \frac{(z_1 + 1)^2 - 1}{(z_1 + 1)^2 + 1}}{H} \approx 1800 \text{ Mpc}$$

Відстань до третьої галактики:

$$D_{S2} \lesssim \frac{c \frac{(z_2 + 1)^2 - 1}{(z_2 + 1)^2 + 1}}{H} \approx 4150 \text{ Mpc}$$



$$D_{S1} \approx 1800 \text{ Mpc}; D_{S2} \approx 4150 \text{ Mpc}; D_L \approx 848 \text{ Mpc}$$

$$D_{LS1} \approx 950 \text{ Mpc}; D_{LS2} \approx 3300 \text{ Mpc}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{LS}}{D_S D_L}} \Rightarrow \frac{\theta_{E2}}{\theta_{E1}} = \sqrt{\frac{D_{LS2}}{D_{S2} D_L} \cdot \frac{D_{S1} D_L}{D_{LS1}}} = \sqrt{\frac{D_{LS2} D_{S1}}{D_{LS1} D_{S2}}}$$

$$\theta_{E2} \approx 1.8''$$



Обчислимо також масу першої галактики:

$$\theta_{E1} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{LS1}}{D_{S1}D_L}} \Rightarrow M = \frac{\theta_{E1}^2 c^2 D_{S1} D_L}{4G D_{LS1}}$$

$$M \approx 8 \cdot 10^{41} \text{ kg} \approx 4 \cdot 10^{11} M_{\odot}$$



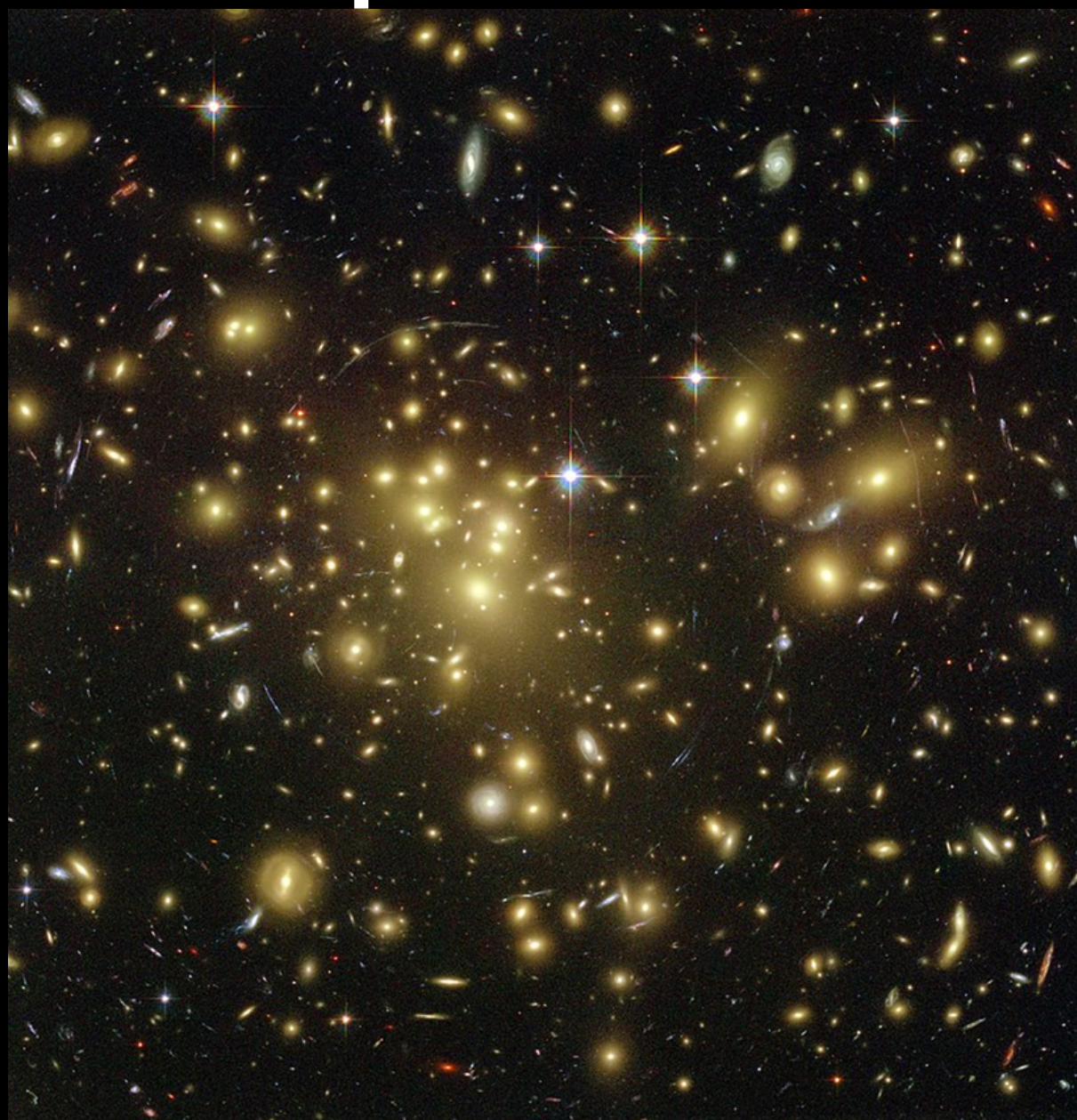
Очікування vs реальність

В реальності коаксіальний випадок не реалізується.
Лінзуюча галактика/скупчення не є точковим об'єктом.

Зображення далекого квазару являє собою не кільця
Ейштейна-Хвольсона, а декілька протяжних утворень,
кількість яких залежить від розподілення маси в лінзі.



Спостереження

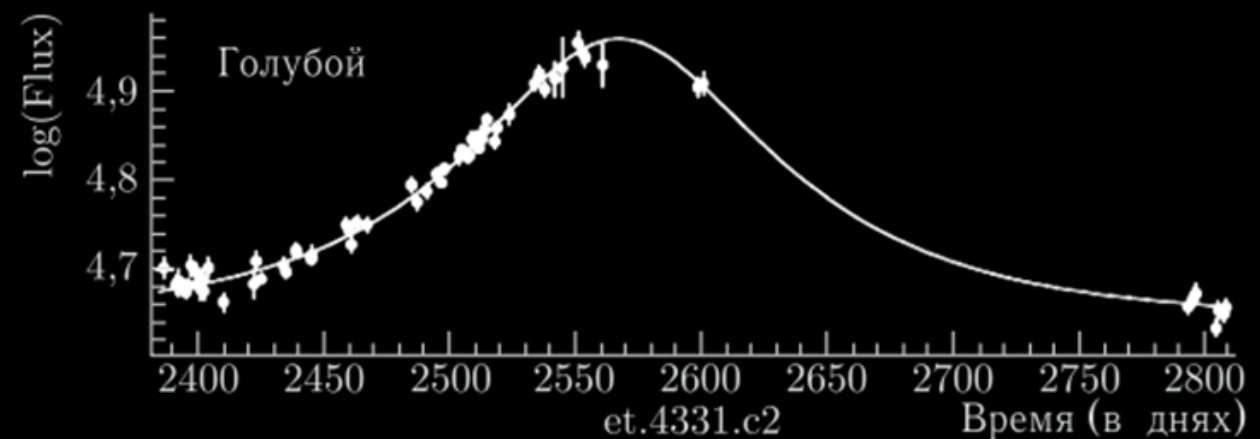
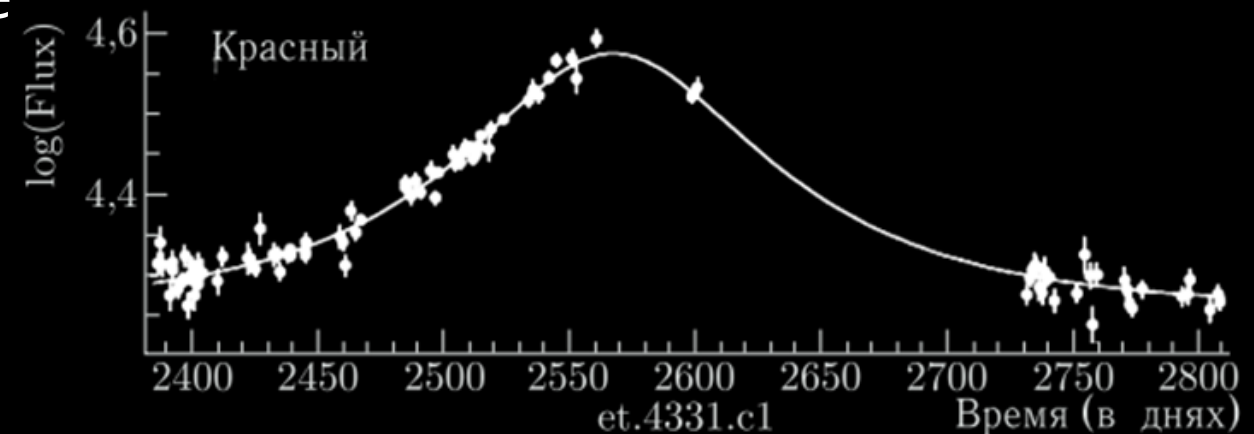


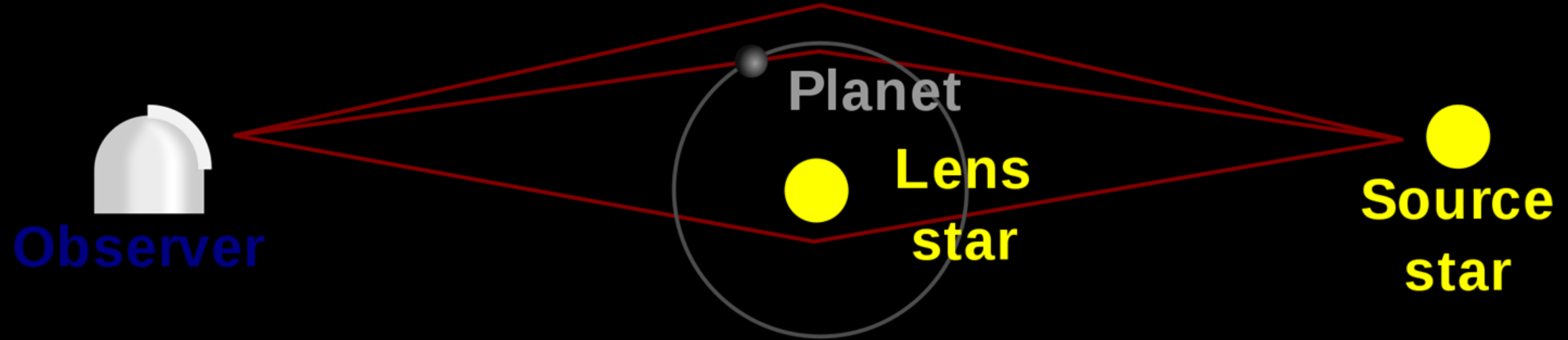


Мікролінзування

Джерело світла та лінзи – зорі. Може суттєво змінити (видиму) яскравість більш далекої зорі на деякий час (20-50 діб). Для спостережень необхідна кутова відстань між об'єктами $\sim 10^{-6} \cdot 1'' \Rightarrow$ дуже рідкісне явище

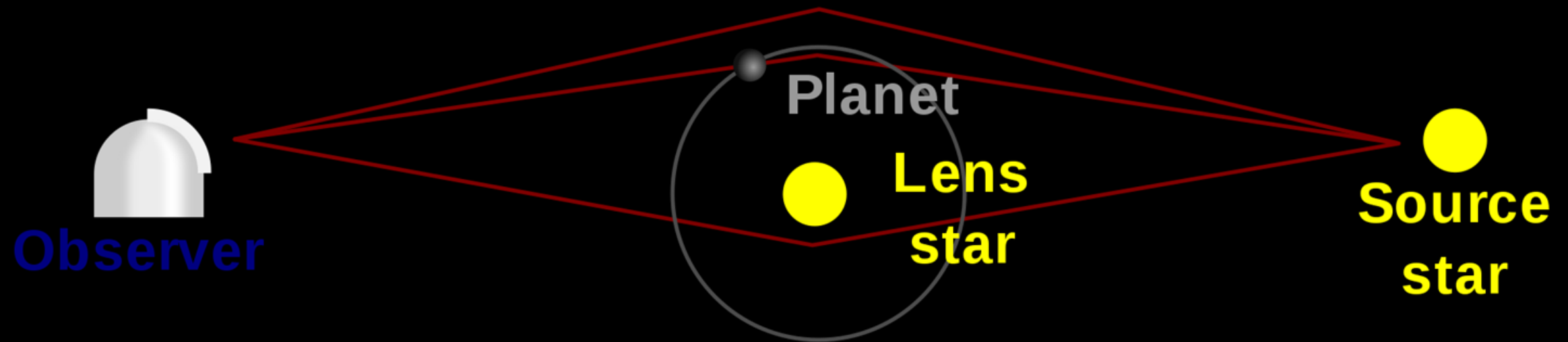
Симуляція





Мікролінзування: екзопланети

Якщо об'єктом лінзування є зоря з планетою, відхилення від стандартної кривої блиску можуть бути великими навіть для планет з малою масою.



Мікролінзування: екзопланети

Крива блиску порівнюється з теоретичними моделями

- відношення мас планети та зорі
- відношення кутової відстані між зорею та планетою до кута Айнштейна

- маса планети
- радіус її орбіти



ВИСНОВКИ

1. Пульсар — нейтронна зоря, що обертається
2. Тісні системи пульсарів — унікальні лабораторії для вивчення ефектів ЗТВ, бо радіопульсари — точні годинники
3. Для таких систем визначається набір посткеплерівських параметрів:

$$\dot{\omega} = 3 \left(\frac{P_{orb}}{2\pi} \right)^{-5/3} \left(\frac{G}{c^3} (M_1 + M_2) \right)^{2/3} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\gamma_p = e \left(\frac{P_{orb}}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{G^{2/3} M_2 (M_1 + 2M_2)}{c^2 (M_1 + M_2)^{4/3}}$$

$$\dot{P}_{orb} = - \frac{192\pi}{5} \left(\frac{P_{orb}}{2\pi} \right)^{-5/3} \frac{G^{5/3} M_1 M_2}{c^5 (M_1 + M_2)^{1/3}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2}$$

$$r_s = \frac{GM_2}{c^3}$$



Висновки

4. Через викривлення часопростору, світло змінює свій напрям біля масивних об'єктів (гравітаційних лінз)
5. Це спотворює зображення об'єктів, що знаходяться поза гравітаційними лінзами
6. У випадку, коли об'єкт розташований чітко за лінзою, утворюються кільця Айнштейна-Чвольсона. На практиці це не реалізується + лінза не точкова → можуть утворюватися кілька зображень, кількість і структура яких залежать від розподілу мас в лінзі
7. Мікролінзування: лінзи та лінзовані об'єкти – зорі. Збільшує яскравість лінзованої зорі, дозволяє виявити екзопланету в лінзи, визначити деякі параметри системи



Дякую за увагу!